

۱۱۱. گزینه ۱ صحیح است.

هر نقطه رأسی بر اشتراک n ابر صفحه مستقل خطی از مجموعه تمام m ابر صفحه مربوط به محدودیت‌های $Ax \leq b$ و n ابر صفحه مربوط به محدودیت‌های نامنفی $x \geq 0$ قرار دارد بنابراین حداکثر $\binom{m+n}{m}$ نقطه رأسی برای مجموعه S وجود دارد.

۱۱۲. گزینه ۲ صحیح است.

تعداد جهت‌های رأسی مجموعه مذکور با تعداد نقاط رأسی مجموعه زیر برابر است:

$$D = \{d \mid d_1 \geq 0, d_2 \geq 0, d_3 \geq 0, d_1 + d_2 + d_3 = 1, -d_1 + 2d_2 - d_3 \geq 0, -d_1 + d_2 = 0, d_3 \leq 0\}$$

$$= \left\{ d \mid d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 0 \end{pmatrix}, d_1 = d_2, d_2 = \frac{1}{2} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

توجه می‌کنیم که تعداد جهت‌های رأسی $S = \{x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ با تعداد نقاط رأسی مجموعه $D = \{d \mid Ad \leq 0, d \geq 0, Id = 1\}$ برابر است.

۱۱۳. گزینه ۳ صحیح است.

$$c_B B^{-1} a_5 - c_5 = a \Rightarrow (c_3 \quad c_1 \quad c_2) \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - 0 = a$$

$$\Rightarrow (-1 \quad 3 \quad 4) \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = a \Rightarrow a = 1$$

$$Z = c_B B^{-1} b$$

می‌دانیم که مقدار تابع هدف از رابطه مقابل بدست می‌آید:

برای اینکه سود کل حاصل از تغییرات منبع دوم، ۲ واحد باشد باید داشته باشیم:

$$22 = (1, 1, 0) \begin{pmatrix} 8 \\ \Delta + 12 \\ 6 \end{pmatrix} = 8 + \Delta + 12 = 22 \Rightarrow \Delta = 2$$

یعنی باید منبع دوم ۲ واحد افزایش یابد.

۱۱۴. گزینه ۴ صحیح است.

برای اینکه جواب بهینه باقی بماند باید شرط شدنی در آن برقرار باشد یعنی باید $B^{-1}b \geq 0$ باشد بنابراین داریم:

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{15} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{15} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{15} & \frac{1}{5} & \frac{4}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \frac{30}{7} \leq b_1 \leq 30$$

۱۱۵. گزینه ۴ صحیح است.

با توجه به اینکه جواب بهینه، در محدودیت جدید صادق است بنابراین جواب، بهینه باقی می ماند اما بعد پایه ۱ واحد افزایش می یابد و پایه بهینه تغییر می کند.

۱۱۶. گزینه ۴ صحیح است

$$\begin{array}{ll} D: \max & wb \\ & wA \leq C \\ & w \geq 0 \end{array} \quad \begin{array}{ll} D': wb' \\ & wA \leq C \\ & w \geq 0 \end{array}$$

اگر مسئله P' نامتناهی باشد آنگاه D' نشدنی است بنابراین مسئله D نیز نشدنی است و این تناقض با شدنی بودن مسئله P است.

۱۱۷. گزینه ۱ صحیح است.

با توجه به اینکه مقدار تابع هدف از رابطه $Z = c_B \bar{b}$ به دست می آید داریم:

$$12 = (c_2, c_1) \begin{pmatrix} 4 \\ a \end{pmatrix} = (-6, 4) \begin{pmatrix} 4 \\ a \end{pmatrix} = -24 + 4a \Rightarrow a = 9$$

همچنین به کمک رابطه $x_B = B^{-1}b$ داریم:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial x_1}{\partial b_2} = 2$$

۱۱۸. گزینه ۳ صحیح است.

مقدار a برابر ۹ است و در نتیجه مقادیر b_1, b_2 به صورت زیر بدست می آیند:

$$\bar{b} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b_1 + \frac{1}{5}b_2 = 4 \\ 2b_2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{31}{10} \\ b_2 = \frac{9}{2} \end{cases}$$

بنابراین تابع هدف مسئله ثانویه به صورت مقابل است:

$$\text{Min } \frac{31}{10}y_1 + \frac{9}{2}y_2$$

۱۱۹. گزینه ۲ صحیح است.

واضح است که $x=0$ یک نقطه رأسی E می باشد اما $x=0$ تنها نقطه رأسی است زیرا اگر x_0 نقطه رأسی دیگری باشد.

$$x_1 = \alpha x_0 \in E \quad \alpha \in (0, 1)$$

$$x_2 = \frac{x_0 - \alpha x_1}{1 - \alpha}, \quad x_2 = \frac{x_0 - \alpha^2 x_0}{1 - \alpha} = (1 + \alpha) x_0 \in E$$

$$x_0 = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2 \quad x_0 \neq x_2 \neq x_1$$

که این متناقض با رأسی بودن x_0 است پس $x = 0$ تنها نقطه رأسی E است.

۱۲۰. گزینه ۱ صحیح است.

در برنامه‌ریزی خطی بین جواب‌های پایه‌ای شدنی و نقاط رأسی تناظر یک به یک برقرار است. چه مسئله تباهیده یا غیر تباهیده باشد.

اما در حالت غیر تباهیده (غیر تبه‌گن) بین پایه‌ها و نقاط رأسی تناظر یک به یک برقرار است.

۱۲۱. گزینه ۳ صحیح است.

اگر در روش دو فازی متغیرهای مصنوعی مخالف صفر باشند بیانگر این موضوع است که مسئله اصلی دارای جواب شدنی نمی‌باشد.

۱۲۲. گزینه ۱ صحیح است.

اگر p نشدنی باشد آنگاه E بی‌کران می‌باشد زیرا در غیر این صورت چون E شدنی است ($W = 0$) یک جواب شدنی است) پس باید جواب بهینه داشته باشد اما اگر E جواب بهینه داشته باشد یعنی p شدنی و تناقض وجود دارد.

۱۲۳. گزینه ۱ صحیح است.

$$\begin{aligned} D: \max \quad & 4y_1 + 3y_2 \\ & y_1 + 2y_2 \leq 2 \\ & y_1 - 2y_2 \leq 3 \\ & 2y_1 + 3y_2 \leq 5 \\ & y_1 + y_2 \leq 2 \\ & 3y_1 + y_2 \leq 3 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

جواب بهینه $y_1^* = \frac{4}{5}$ و $y_2^* = \frac{3}{5}$ است بنابر قضیه کمبود مکمل داریم

$$x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$$

چون هیچ‌یک از محدودیت‌های دوگان متناظر فعال نیستند بنابراین

$$\begin{cases} 2x_1^* + x_5^* = 3 \\ x_1^* + 3x_5^* = 4 \end{cases} \Rightarrow x_1^* = 1, x_5^* = 1$$

۱۲۴. گزینه ۱ صحیح است.

$$p: \min z = cx$$

$$D: \max wb$$

$$D: \max b^t w^t$$

$$Ax = b$$

$$wA \leq c$$

$$\equiv A^t w^t \leq c^t$$

$$x \geq 0$$

نا مقید W

نا مقید w^t

$$D: \max cw^t$$

$$Aw^t \leq b \quad \text{با فرض } w^t = x$$

w^t نامقید

$$D: \max cx$$

$$Ax \leq b$$

x نامقید

چون $x^0 \in p$ است بنابراین $Ax^0 = b$ و $x \geq 0$ بنابراین $Ax^0 \leq b$ و $x^0 \geq 0$ نیز دارای جواب شدنی است و باید مقدار تابع هدف P و D یکسان شود بنابراین مقدار بهینه P و D یکسان است.

۱۲۵. گزینه ۴ صحیح است.

A	۰	۳	۲	۲
B	۲	۰	۰	۲
C	۰	۱	۴	۳
D	۳	۲	۰	۰

$$x_{A_1} = 1, x_{B_3} = 1, x_{C_2} = 1, x_{D_4} = 1$$

A	۰	۲	۱	۱
B	۳	۰	۰	۲
C	۰	۰	۳	۲
D	۴	۲	۰	۰

۱۲۶. گزینه ۳ صحیح است.

$$y_i + w_j \leq c_{ij}$$

y_i و w_j نیز آزاد می‌باشند.

۱۲۷. گزینه ۳ صحیح است.

با شرط $L = \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ مدل متوازن بوده و همواره دارای جواب شدنی $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{L} \geq 0$ است.

۱۲۸. گزینه ۲ صحیح است.

در حل مسئله به کمک الگوریتم سیمپلکس دوگان در صورتی که متغیر خروجی موجود باشد و همه عناصر سطر لولا غیر منفی باشند آنگاه متغیر ورودی وجود ندارد در این صورت مسئله اولیه نشدنی و دوگان آن نامتناهی است.

۱۲۹. گزینه ۲ صحیح است.

$$\begin{aligned} \text{Max } x_0 &= 40x_1 + 20x_2 + 5x_3 \\ 2x_1 + x_2 &= 1 \\ x_2 &= -2 \\ 4x_1 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

$x_2 = -2$ نشدنی است بنابراین دوگان آن یا نشدنی یا بیکران است با توجه به این که مسئله شدنی است بنابراین بیکران است.

۱۳۰. گزینه ۴ صحیح است.

به دلیل وابستگی خطی X^+ , X^- هیچگاه این دو متغیر نمی‌توانند همزمان در یک پایه قرار گیرند.