

۳۱. گزینه ۲ صحیح است.

$$(A - B)' \cap A = (A \cap B)' \cap A = (A' \cup B) \cap A \\ = (A' \cap A) \cup (B \cap A) = B \cap A \stackrel{A \subset B}{=} A$$

۳۲. گزینه ۱ صحیح است.

$$\left[1 + \left(x + \frac{2}{x}\right)\right]^8 = 1 + C_8^1 \left(x + \frac{2}{x}\right) + C_8^2 \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 + C_8^3 \left(x + \frac{2}{x}\right)^3 + C_8^4 \left(x + \frac{2}{x}\right)^4 + C_8^5 \left(x + \frac{2}{x}\right)^5 + \\ C_8^6 \left(x + \frac{2}{x}\right)^6 + C_8^7 \left(x + \frac{2}{x}\right)^7 + C_8^8 \left(x + \frac{2}{x}\right)^8$$

در هر توان زوج $\left(x + \frac{2}{x}\right)$ یک جمله فاقد از x وجود دارد که عبارتند از

$$C_8^0, 2C_8^2, 24C_8^4, 80C_8^6, C_8^8$$

تعداد جمله‌های فاقد x ، ۵ می‌باشد.

۳۳. گزینه ۴ صحیح است.

$$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow [x] \leq x \leq |x| \Rightarrow [x] \leq |x|$$

بنابراین، فقط وقتی $[x] = |x|$ است که $x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ باشد در نتیجه

$$D_f = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

۳۴. گزینه ۱ صحیح است.

$$g(x) = 2f(x-1) + 3$$

$$g(x) = y \Rightarrow x = g^{-1}(y)$$

$$y = 2f(x-1) + 3 \Rightarrow f(x-1) = \frac{y-3}{2} \Rightarrow x-1 = f^{-1}\left(\frac{y-3}{2}\right) \Rightarrow$$

$$x = 1 + f^{-1}\left(\frac{y-3}{2}\right) \Rightarrow g^{-1}(x) = 1 + f^{-1}\left(\frac{x-3}{2}\right)$$

۳۵. گزینه ۴ صحیح است.

می‌دانیم که اگر تابع $y = f(x)$ معکوس پذیر باشد آنگاه

$$(f^{-1})'_{(y)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(y)]} = \frac{1}{f'(x)}$$

یعنی مشتق تابع معکوس برابر است با معکوس مشتق تابع

$$f(x) = x + \cos x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = y = 1$$

$$(f^{-1})'_{(1)} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1 - \sin(0)} = 1$$

۳۶. گزینه ۲ صحیح است.

تابع درآمد برابر است با مقدار تولید کالا در قیمت هر واحد آن

$$y = px = 12p - p^3$$

$$y' = 0 \Rightarrow 12 - 3p^2 = 0 \Rightarrow p = 2$$

$$\Rightarrow x = 12 - p^2 = 12 - 4 = 8$$

۳۷. گزینه ۳ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^y} \right]^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

۳۸. گزینه ۲ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} a & x=0 \\ \frac{\sin \pi x}{x^2 - x} & 0 < x < 1 \\ b & x=1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \pi x}{x^2 - x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi \cos \pi x}{2x - 1} = -\pi \Rightarrow f(0) = a = -\pi$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin \pi x}{x^2 - x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\pi \cos \pi x}{2x - 1} = -\pi \Rightarrow f(1) = b = -\pi$$

$$\Rightarrow a + b = -2\pi$$

۳۹. گزینه ۱ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$$

چون g در نقطه (a) پیوسته است لذا

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)g(x) - (a - a)g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)g(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$$

۴۰. گزینه ۴ صحیح است.

$$y = x^{x-1} \quad y(1) = 1$$

$$\text{Lny} = (x-1)\text{Lnx} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \text{Lnx} + \frac{(x-1)}{x} \Rightarrow y' = x^{x-1} \left(\text{Lnx} + \frac{x-1}{x} \right) \Rightarrow m = y'(1) = 0$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = 0(x - 1) \Rightarrow y = 1$$

۴۱. گزینه ۱ صحیح است.

$$y^2 = \cos x + \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \sqrt{\dots}}}}$$

$$y^2 = \cos x + y \Rightarrow 2yy' = -\sin x + y' \Rightarrow y'(2y - 1) = -\sin x \Rightarrow y' = \frac{\sin x}{1 - 2y}$$

۴۲. گزینه ۲ صحیح است.

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \quad y = (2 - \sqrt{x})^2 = 4 + x - 2\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow y'' = \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$y'' \Big|_{x=\frac{9}{4}} = \frac{1}{2 \times \frac{9}{4} \times \sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{4}{27}$$

۴۳. گزینه ۴ صحیح است.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = x^2 e^{-x}$$

$$[f(\ln x)]' = \left(\frac{1}{x}\right) f'(\ln x) = \frac{1}{x} (\ln x)^2 e^{-\ln x} = \frac{1}{x} (\ln x)^2 e^{-\frac{\ln x}{x}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 (\ln x)^2 = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$$

۴۴. گزینه ۳ صحیح است.

نکته: اگر $f(x, y) = 0$ یک تابع ضمنی از x, y باشد آنگاه:

$$y' = -\frac{f_x}{f_y} \quad f(x, y) = x^y + y^x - xy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{yx^{y-1} + y^x \ln y - y}{x^y \ln x + xy^{x-1} - x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_{(2,2)} = -\frac{4 + 4 \ln 2 - 2}{4 \ln 2 + 4 - 2} = -1$$

۴۵. گزینه ۲ صحیح است.

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x + y} \Rightarrow f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\sqrt{\lambda^2(x^2 + y^2)}}{\lambda(x + y)} = \lambda^0 \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x + y}$$

بنابراین $f(x, y)$ تابعی همگن و از درجه صفر است لذا داریم:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x}$$

۴۶. گزینه ۱ صحیح است.

$$\begin{cases} z_x = 4x = 0 \Rightarrow z_{xx} = 4, z_{xy} = 0 \\ z_y = -2ay = 0 \Rightarrow z_{yy} = -2a, z_{yx} = 0 \end{cases}$$

$$|4 > 0, \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2a \end{vmatrix} = -8a < 0 \Rightarrow a > 0$$

۴۷. گزینه ۳ صحیح است.

$$z = f(x + z, y - z)$$

$$z = f(u, v)$$

$$\begin{cases} u = x + z \\ v = y - z \end{cases} \quad \begin{cases} z'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x \\ z'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y \end{cases}, \quad \begin{cases} u'_x = 1 + z'_x \\ v'_x = -z'_x \end{cases}, \quad \begin{cases} u'_y = z'_y \\ v'_y = 1 - z'_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} z'_x = f'_u(1+z'_x) - f'_v z'_x \\ z'_y = f'_u(z'_y) + f'_v(1-z'_y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z'_x = f'_u + f'_u z'_x - f'_v z'_x \\ z'_y = f'_u z'_y + f'_v - f'_v z'_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} z'_x(1-f'_u+f'_v) = f'_u \\ z'_y(1-f'_u+f'_v) = f'_v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z'_x = \frac{f'_u}{1-f'_u+f'_v} \\ z'_y = \frac{f'_v}{1-f'_u+f'_v} \end{cases}$$

۴۸. گزینه ۴ صحیح است.

$$\begin{cases} f(u, v) = u \cdot v & \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} & u = 3 \\ u = \sqrt{x^2 + 4z} & & v = 2 \\ v = x \cdot y \cdot z & \frac{\partial f}{\partial x} = v \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4z}} + u \cdot (y \cdot z) & \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \cdot \frac{1}{3} + 3(1 \times 2) = \frac{2}{3} + 6 = \frac{20}{3}$$

۴۹. گزینه ۲ صحیح است.

$$\begin{cases} y = \sin x \\ y = \cos x \end{cases} \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4} \in [0, 2\pi]$$

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} (\cos x - \sin x) dx = 4\sqrt{2}$$

۵۰. گزینه ۳ صحیح است.

با مشتق

$$f'(x) = \int_0^x f(t) \frac{1}{t+1} dt \Rightarrow \frac{d}{dx} \int_0^x f(t) \frac{1}{t+1} dt = f(x) \frac{1}{1+x} \Rightarrow \frac{1}{x} f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} f(x) = \ln|1+x| + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{0} f(0) = \ln 1 + c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} \ln(1+x)$$

۵۱. گزینه ۱ صحیح است.

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 6 & 6 & 3 \\ 9 & 5 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3R_1 + R_1 \rightarrow R_1} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 5 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-(9R_1 + R_2) + R_2 \rightarrow R_2} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین رتبه A، ۲ است.

۵۲. گزینه ۲ صحیح است.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 4I \Rightarrow A^4 = 4A^2 = 16I$$

$$f(A) = A^4 - 4A^2 + 5A + I = 16I - 16I + 5 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$$

۵۳. گزینه ۳ صحیح است.

ابتدا ماتریس ضرایب را در نظر می‌گیریم $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$ اگر دترمینان A صفر باشد، آنگاه دستگاه معادلات همگن دارای جواب

غیرصفر است.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a(a^2 - bc) - b(ac - b^2) + c(c^2 - ba) = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

۵۴. گزینه ۴ صحیح است.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

۵۵. گزینه ۲ صحیح است.

برای اینکه سه بردار وابستگی خطی داشته باشند بایستی دترمینان آنها صفر باشد بنابراین:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

۵۶. گزینه ۱ صحیح است.

صفت مشخصه، صفتی است که میان افراد جامعه مشترک است. به طور مثال افرادی که در جامعه دارای مدرک دکترا هستند تشکیل یک جامعه آماری می‌دهند.

۵۷. گزینه ۳ صحیح است.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{100}{20} = 5$$

$$\delta_x^2 = \frac{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}{n} = \frac{520 - \frac{100 \times 100}{20}}{20} = \frac{520 - 500}{20} = 1$$

$$\delta_x = 1 \quad \text{ضریب تغییرات} \quad CV = \frac{\delta_x}{\bar{x}} = \frac{1}{5} = 0.2$$

۵۸. گزینه ۴ صحیح است.

با فرض اینکه از چولگی مناسبی برخوردار باشد، فرمول‌های اول و دوم پیرسون با هم برابر خواهند بود.

$$sk_1 = \frac{(\mu - \text{mod})}{\delta}$$

$$sk_2 = \frac{3(\mu - med)}{\delta}$$

$$\mu - mod = 3(\mu - med) \rightarrow 20 - mod = 3(20 - 30) \rightarrow mod = 50$$

۵۹. گزینه ۱ صحیح است.

با استفاده از قانون چبشی داریم

$$p(|x - \mu_x| < k\delta) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$k = 3 \quad p(\mu_x - 3\delta < x < \mu_x + 3\delta) \geq 1 - \frac{1}{3^2} = \frac{8}{9} \approx 0.88$$

بنابراین حداقل ۸۸٪ داده‌ها در بازه مذکور قرار دارند.

۶۰. گزینه ۴ صحیح است.

$$p(G) = p(A) \cdot p(G|A) + p(B) \cdot p(G|B)$$

$$= 0.7 \times 0.9 + 0.3 \times 0.8 = 0.63 + 0.24 = 0.87$$

۶۱. گزینه ۱ صحیح است.

چون تعداد موفقیت‌ها در یک فاصله زمانی خواسته شده باید از توزیع پواسن استفاده کرد ولی باید دقت نمود که:

تعداد مشتریان در ۱۲ دقیقه X

$$\mu = \frac{12}{30} \times 5 = 2 \quad \text{متوسط مشتریان در ۱۲}$$

$$p(x, \mu) = \frac{e^{-\mu} \cdot \mu^x}{x!}$$

$$p(x = 3) = \frac{e^{-2} \cdot 2^3}{3!} = \frac{4}{3} e^{-2}$$

۶۲. گزینه ۲ صحیح است.

میانه برای متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی $f(x)$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\int_{-\infty}^{med} f(x) dx = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} (med)^2 = \frac{1}{2} \quad med = \sqrt{2}$$

و امید نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{6} x^3 \Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

۶۳. گزینه ۳ صحیح است.

با توجه به اینکه احتمال مورد نظر ۰/۹۹ شده پس سطح خطا ۰/۰۱ یا سطح اطمینان ۰/۹۹ می‌باشد از طرفی چون هر دوسوی نامساوی منفی است پس می‌توان ادعا کرد که در سطح خطای ۰/۰۱، $\mu_2 > \mu_1$ می‌باشد.

۶۴. گزینه ۴ صحیح است.

$$\varepsilon = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} = Z_{0.975} \frac{s}{\sqrt{n}} = 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{36}} = 1.63$$

فاصله اطمینان ۰/۹۵ برای μ به صورت زیر بدست می‌آید.

$$I_{0.95}(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon) = (30 - 1.63, 30 + 1.63) = (28.37, 31.63)$$

۶۵. گزینه ۲ صحیح است.

در توزیع پیوسته $f(x)$ ، احتمال انتخاب یک نقطه برابر صفر است.

۶۶. گزینه ۳ صحیح است.

$$a = \bar{y} - b\bar{x}, \quad b = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$$

$$\sum xy = \sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n} = 52 - \frac{20 \times 10}{5} = 12$$

$$\sum x^2 = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n} = 104 - \frac{(20)^2}{5} = 24$$

$$b = 0/5, \quad \bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{20}{5} = 4, \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{10}{5} = 2$$

$$a = 2 - 0/5 \times 4 = 0$$

پس معادله رگرسیون به صورت $y = 0/5x$ خواهد بود.

۶۷. گزینه ۱ صحیح است.

زمانی که میانه به عنوان مقدار مرکزی بکار رود، انحراف چارکی $\left(\frac{Q_3 - Q_1}{2}\right)$ برای پراکندگی استفاده می شود.

۶۸. گزینه ۲ صحیح است.

برای بدست آوردن مد، باید طول نقطه ماکزیم تابع چگالی احتمال را حساب کنیم و تابع چگالی احتمال مشتق تابع توزیع می باشد.

$$f(x) = F'(x) = \frac{-x^2}{3} + \frac{10}{9}x - \frac{1}{3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{-2x}{3} + \frac{10}{9} = 0 \rightarrow \frac{2x}{3} = \frac{10}{9} \rightarrow x = \frac{10}{6} = 1/66$$

۶۹. گزینه ۴ صحیح است.

واریانس توزیع دو جمله ای برابر $\text{var}(x) = npq$ می باشد که در آن $n = 64$ و $p = q = \frac{1}{2}$ می باشد بنابراین داریم

$$\text{var}(x) = 64 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 16$$

و انحراف معیار برابر $\delta = \sqrt{16} = 4$ است.

۷۰. گزینه ۳ صحیح است.

$$E(x^2) = \int x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{6} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{10}{24}$$